Министерство образования Новосибирской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

Новосибирской области «Новосибирский авиационный технический колледж

имени Б.С. Галущака.»

**Лабораторная работа №2 по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики» на тему:**

**«Исследование графов»**

Выполнила студентка группы ПР-22.102:

Беляева Альбина Сергеевна

Проверил преподаватель:

Оболенцева Татьяна Дмитриевна

Г. Новосибирск, 2024

Граф

Способы задания графа

1. Графически

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

a

b

c

d

e

f

g

h

i

j

1. Матрица смежности

Матрица смежности имеет размерность n\*n, где n – вершины.

Элемент матрицы равен единице, если есть связь между i-той и j – той вершинами. В случае есть такой связи нет, элемент будет равен нулю.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |
|  | 1 |  | 1 |  |  |  |  | 1 |
| 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  | 2 |
|  | 1 |  |  |  | 1 |  |  | 3 |
| 1 | 1 |  |  |  |  | 1 |  | 4 |
|  | 1 |  |  |  |  | 1 |  | 5 |
|  |  | 1 |  |  |  |  | 1 | 6 |
|  |  |  | 1 | 1 |  |  | 1 | 7 |
|  |  |  |  |  | 1 | 1 |  | 8 |

1. Матрица инциденций

Матрица инциденций, или инцидентная матрица имеет размерность m\*n, где m – дуга, n – вышина. Элемент матрицы будет равен 1, если это начало дуги, -1 - соответствует концу дуги.

Эта матрица соответствует орграфу, то есть исходный граф нужно сделать орграфом задав направления рёбер.

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

a

b

c

d

e

f

g

h

i

j

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |
| 1 | -1 |  |  |  |  |  |  | a |
| -1 |  |  | 1 |  |  |  |  | b |
|  | -1 |  | 1 |  |  |  |  | c |
|  |  |  | -1 |  |  | 1 |  | d |
|  | 1 |  |  | -1 |  |  |  | e |
|  |  |  |  | 1 |  | -1 |  | f |
|  | 1 | -1 |  |  |  |  |  | g |
|  |  |  |  |  |  | -1 | 1 | h |
|  |  | 1 |  |  | -1 |  |  | i |
|  |  |  |  |  | 1 |  | -1 | j |

1. Фактор-множество

В фактор – множестве выделяется окрестность единичного радиуса элемента, или сечение. Это множество элементов  такое, что . Множество сечений, взятых для всех элементов множества М, при задании в нем отношения Т называется фактор-множеством множества М по отношению к Т. Фактор – множество задается в виде двух строк:

1. Элементы множества M;

2. Окрестность.

1 2 3 4 5 6 7 8

({2, 4} {1, 3, 4, 5} {2, 6} {1, 2, 7} {2, 7} {3, 8} {4, 5, 8} {6, 7})

1. Матрица достижимости

Матрица обозначает наличие маршрута от i к j.

Диаметр графа

Диаметр графа – это максимальное расстояние между двумя вершинами в графе. Он измеряется в количестве ребер или шагов, необходимых для достижения одной вершины из другой.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вершины | Расстояние | Вершины | Расстояние | Вершины | Расстояние |
| 1-2 | 1 | 3-4 | 2 | 6-8 | 1 |
| 1-3 | 2 | 3-5 | 2 | 7-8 | 1 |
| 1-4 | 1 | 3-6 | 2 |  |  |
| 1-5 | 2 | 3-7 | 3 |  |  |
| 1-6 | 3 | 3-8 | 2 |  |  |
| 1-7 | 2 | 4-5 | 2 |  |  |
| 1-8 | 3 | 4-6 | 3 |  |  |
| 2-3 | 1 | 4-7 | 1 |  |  |
| 2-4 | 1 | 4-8 | 2 |  |  |
| 2-5 | 1 | 5-6 | 3 |  |  |
| 2-6 | 2 | 5-7 | 1 |  |  |
| 2-7 | 2 | 5-8 | 2 |  |  |
| 2-8 | 3 | 6-7 | 2 |  |  |

d(G)=3

Матрица достижимости первой степени

Матрица достижимости первой степени описывает все маршруты единичной длины из одной вершины в другую буквой, которой названо ребро, соединяющее эти вершины

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |
|  | a |  | b |  |  |  |  | 1 |
| a |  | g | c | e |  |  |  | 2 |
|  | g |  |  |  | i |  |  | 3 |
| b | c |  |  |  |  | d |  | 4 |
|  | e |  |  |  |  | f |  | 5 |
|  |  | i |  |  |  |  | j | 6 |
|  |  |  | d | f |  |  | h | 7 |
|  |  |  |  |  | j | h |  | 8 |

Матрица достижимости второй степени

Матрица достижимости второй степени описывает маршруты длиной в два ребра и получатся в результате возведения в квадрат матрицы достижимости первой степени

= – формула для нахождения элемента матрицы достижимости второй степени

=(\*)+(\*)+(\*)+(\*)+ (\*)+ (\*)+ (\*)+ (\*)=0+0+0+c\*b+0+0+0+0=c\*b

Остальные элементы ищем по той же формуле и в итоге получаем следующую матрицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |
|  | c\*b | g\*a | c\*a | e\*a |  | d\*b |  | 1 |
| b\*c |  |  | b\*a |  | i\*g | c\*d  e\*f |  | 2 |
| a\*g |  |  | c\*g | e\*g |  |  | j\*i | 3 |
| a\*c | a\*b | g\*c |  | e\*c  f\*d |  |  | h\*d | 4 |
| a\*e |  | g\*e | c\*e  d\*f |  |  |  | h\*f | 5 |
|  | g\*i |  |  |  |  | h\*j |  | 6 |
| b\*d | c\*d  e\*f |  |  |  | j\*h |  |  | 7 |
|  |  | i\*j | d\*h | f\*h |  |  |  | 8 |

Сложение матриц  
Сложение матриц - это операция сложения двух матриц путем сложения соответствующих элементов вместе

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |
|  | a + c\*d | g\*a | b + c\*a | e\*a |  | d\*b |  | 1 |
| a + b\*c |  | g | c + b\*a | e | i\*g | c\*d + e\*f |  | 2 |
| a\*g | g |  | c\*g | e\*g | i |  | j\*i | 3 |
| b + a\*c | c + a\*b | g\*c |  | e\*c + f\*d |  | d | h\*d | 4 |
| a\*e | e | g\*e | c\*e + d\*f |  |  | f | h\*f | 5 |
|  | g\*i | i |  |  |  | h\*j | j | 6 |
| b\*d | c\*d + e\*f |  | d | f | j\*h |  | h | 7 |
|  |  | i\*j | d\*h | f\*h | j | h |  | 8 |

Вывод: пустые клетки в этой матрице говорят о том, что расстояние между этими вершинами равно диаметру графа, а занятые говорят о том, что расстояние равно 1 или 2.

1. Цикломатическая матрица

Для исследования циклов в графе используют цикломатическую матрицу C(G)=[], где m – число циклов, а n – число рёбер. Элемент матрицы равен единице, если существует указанное ребро в цикле, иначе 0.

Число строк в матрице соответствует числу циклов, число столбцов – числу ребер.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | c | d | e | f | g | h | i | j |  |
| 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |  | R1 |
|  |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  | R2 |
|  |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | R3 |
| 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  | R4 |
| 1 | 1 |  | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | R5 |
|  |  | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | R6 |

Из выделенных циклов нужно выделить базисные, количество которых определяется по формуле:

ν(G) = m – n + 1, где m – число рёбер, а n – число вершин.

ν(G) = 8 – 6 + 1 = 3

Базисных циклов три и это циклы R1, R2, R3.

2

 5

7

 3

6

 8

e

f

g

h

i

j

2

4

1

a

b

c

2

4

 5

7

c

d

e

f

R1

R2

R3

Все остальные циклы выражаются как линейная комбинация базисных циклов по модулю 2:

R4 = R1 ⊕ R2

R5 = R1 ⊕ R2 ⊕ R3

R6 = R2 ⊕ R3

Остов – это остовный подграф, являющийся деревом

Остовный подграф – подграф, содержащий все вершины графа

Дерево – связный граф, не содержащий ни одного цикла

Хорды – это ребра, графа не принадлежащие остову. В нашем случае хордами являются ребра c, f, h. Число хорд связано с числом базисных циклов.

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

a

b

d

e

g

i

j

Операции над графами

Операции будут проводиться над двумя подграфами исходного графа

1. Объединение

В результате объединения формируется граф, носители и сигнатуры которого формируются из носителей и сигнатур исходных графов

2

 3

4

 5

6

7

 8

=

=

2

 3

4

 5

6

7

 8

Получен один граф с двумя компонентами связности

1. Сумма

В результате суммы формируется полный двудольный граф

 3

 5

 8

2

 3

4

 5

6

7

 8

+

=

=

2

4

6

7

Говорят, что вершина (2, 4, 5, 7) конусирует другие вершины (3, 6, 8).

1. Декартово произведение

В результате декартово произведения формируется бинарное отношение

(2,3)

(2,6)

(2,8)

(4,3)

(4,6)

(4,8)

(5,3)

(5,6)

(5,8)

(7,3)

(7,6)

(7,8)

Вершины с одинаковыми элементами не соединяются.

Близость графа к отношениям

Определения близости отношения к свойству α – это минимальное число дуг, которое нужно удалить или добавить к графу задающему это отношение, для того чтобы граф задавал отношение t, которое обладает свойством α

1. Тождественность

Δ(T, δ) = 8

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

1. Симметричность

Δ(T, ρ) = 10

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

1. Транзитивность

Δ(T, η) = 13

(4, 1) (1, 2) > (4, 2)

(4, 2) (2, 5) > (4, 5)

(2, 3) (3, 6) > (2, 6)

(5, 7) (7, 4) > (5, 4)

(1, 2) (2, 3) > (1, 3)

(1, 2) (2, 5) > (1, 5)

(2, 5) (5, 7) > (2, 7)

(3, 6) (6, 8) > (3, 8)

(4, 2) (2, 3) > (4, 3)

(6, 8) (8, 7) > (6, 7)

(7, 4) (4, 1) > (7, 1)

(7, 4) (4, 2) > (7, 2)

(8, 7) (7, 4) > (8, 4)

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

Разрез, разделяющее множество графа

Разделяющее множество – множество рёбер, удаление которых делает граф несвязным.

Разделяющее множество

А = {g, h, c}

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

a

b

d

e

f

i

j

G1

G2

Разрез

B = {g, h}

Таким образом мы получили граф с двумя компонентами связности G1, G2.

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

a

b

c

d

e

f

i

j

G1

G2

Дополнение до полного графа

Дополнением графа G называется граф G с теми же вершинами, что и граф G, и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу G, чтобы получился полный граф

С помощью следующей формулы можно узнать сколько рёбер будет в дополнении к графу:

Исходный граф (10 рёбер)

2

4

 5

7

 3

6

 8

1

Дополнение до полного графа (18 рёбер)

Теорема Эйлера для связного плоского графа

Для связного плоского графа имеющего *n* вершин, *m* ребер, *r* граней справедлива формула Эйлера:



Выделяются внутренние и внешние грани. *Внутренняя грань* – это конечная область плоскости, ограниченная замкнутым маршрутом, не содержащая ни вершин, ни ребер этого графа. В теореме Эйлера учитывается и внешняя грань, находящаяся за границей внутренней грани. *Граница грани* – это минимальный маршрут. Существует две леммы:

1. Для любого плоского графа , т.к. цикл имеет минимум три ребра. Если в графе все циклы имеют три ребра, то граф называется плоской триангуляцией.
2. Для любого плоского графа при : 

Грани

1. abc
2. cdef
3. efghij
4. abdghij

Формула Эйлера:

8-10+4=2

Лемма 1:

Лемма 2:

Вывод: граф является связным плоским графом

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы был изучен алгоритм исследования графов.